間違いやすい解の配置の注意

No. 1

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ について、次の場合の $a,\ b$ に関する条件を求めよ．

(1) $1<x<2$ の範囲にただ 1 つの解をもつ場合．

(2) $1 \leqq x \leqq 2$ の範囲にただ 1 つの解をもつ場合．

■よくある誤答　$f(x)=x^2+ax+b$ とおいて、

(1)「$f(1)>0$ かつ $f(2)<0$」または「$f(1)>0$ かつ $f(2)<0$」$\Longleftrightarrow f(1)\cdot f(2)<0$

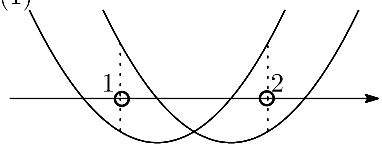
(2)「$f(1) \geqq 0$ かつ $f(2) \leqq 0$」または「$f(1) \leqq 0$ かつ $f(2) \geqq 0$」$\Longleftrightarrow f(1)\cdot f(2) \leqq 0$

【(1) の解説 】

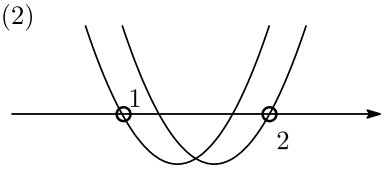
図 (1) を見て、$f(1)\cdot f(2)<0$ を解としたのでは、図 (2) の場合が含まれない．かと言って、図 (2) を含めようとして、$f(1)\cdot f(2) \leqq 0$ としたのでは、正しくない図 (3) が含まれてしまう．

$f(1)\cdot f(2)<0$ は、「1 つの解が 1 と 2 の間で、他の解が 1 より小か 2 より大」を意味する．したがって、正確には「$f(1)\cdot f(2)<0$」の他に「$f(1)=0$ または $f(2)=0$」の場合を別に考察する必要がある．

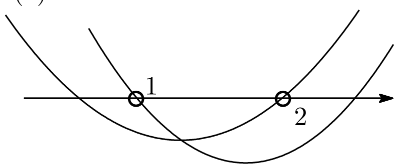
(1)



(2)



(3)

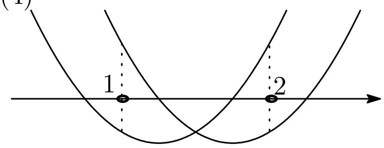


【(1) の正しい解 】　2 次方程式の 2 つの解を「1 と α」または「2 と β」とすると解と係数の関係より「$1\cdot\alpha=b$」または「$2\cdot\beta=b$」であることに注意して、

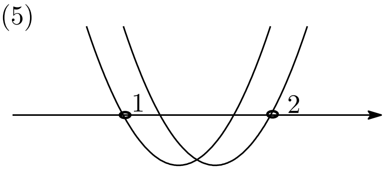
$$(1) \Longleftrightarrow \quad f(1)\cdot f(2)<0 \qquad or \ \begin{cases} f(1)=0 \\ 1<\alpha<2 \end{cases} \qquad or \ \begin{cases} f(2)=0 \\ 1<\beta<2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (1+a+b)(4+2a+b)<0 \quad or \ \begin{cases} 1+a+b=0 \\ 1<b<2 \end{cases} \qquad or \ \begin{cases} 4+2a+b=0 \\ 1<\dfrac{b}{2}<2 \end{cases}$$

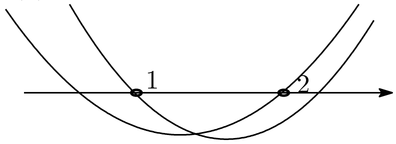
(4)



(5)



(6)



【(2) の解説 】

図（4）を見て、感覚的に $f(1)\cdot f(2) \leqq 0$ を解としたのでは、図（５）の場合が含まれ、閉区間内に 2 つの解を持つことになり正しくない．かと言って、図（５）を排除しようと、$f(1)\cdot f(2) < 0$ としたのでは、正しい図（６）の場合が抜けてしまうことになる．

$f(1)\cdot f(2) < 0$ は、「1 つの解が 1 と 2 の間で、他の解が 1 より小か 2 より大」を意味し、図（4）の場合のみを含む．したがって、正確には「$f(1)\cdot f(2) < 0$」の他に「$f(1) = 0$ または $f(2) = 0$」の場合を別に考察する必要がある．

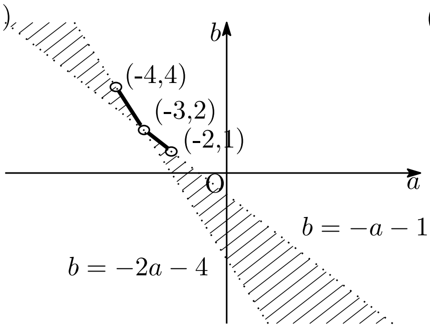
【(2) の正しい解 】 2 次方程式の 2 つの解を「1 と α」または「2 と β」とすると解と係数の関係より「$1\cdot\alpha = b$」または「$2\cdot\beta = b$」であることに注意して、

$$(2) \iff f(1)\cdot f(2) < 0 \quad or \quad \begin{cases} f(1) = 0 \\ \alpha < 1 \ or \ 2 < \alpha \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} f(2) = 0 \\ \beta < 1 \ or \ 2 < \beta \end{cases}$$

$$\iff (1+a+b)(4+2a+b) < 0 \quad or \quad \begin{cases} 1+a+b = 0 \\ b < 1 \ or \ 2 < b \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} 4+2a+b = 0 \\ \dfrac{b}{2} < 1 \ or \ 2 < \dfrac{b}{2} \end{cases}$$

以上をまとめて次の解を得る．

(1)



(2)